PROBABILIDADES - 2º Ano MAEG 03.07.2018

Exame ER

Nome:____Número:_________

Cotação: (Espaço reservado para classificações)

1. (15)	**3a.(15)**	**4. (15)**	**6a.(15)**	**8.(15)**
2a. (15)	**3b.(15)**	**5a.(10)**	**6b.(20)**	
2b. (10)	**3c.(10)**	**5b.(10)**	**7a.(10)**	
	3d.(10)		**7b.(15)**	

Nota: todas as questões devem ser devidamente formalizadas e justificadas.

1. **[15]** Foi feita uma importante campanha publicitária de lançamento do refrigerante A nos principais canais de televisão. Com o objectivo de saber se a campanha influenciou a compra do refrigerante procedeu-se a um estudo de de mercado que permitiu apurar os seguintes resultados:
   - 55% das pessoas viram o anúncio na televisão;
   - 30% das pessoas compraram o refrigerante A;
   - 40% das pessoas nem viram o anúncio de televisão nem compraram o refrigerante A.

   Assuma como válidos para toda a população os resultados apurados neste estudo. De entre as pessoas que viram o anúncio, que percentagem comprou o refrigerante em causa?

2. Seja (X,Y) uma variável aleatória bidimensional discreta com a seguinte função de probabilidade:

x\y	0	1	2	3
-1	0.05	0.05	0.10	0.10
0	0.02	0.03	0.05	0.10
1	0.08	0.12	0.15	0.15

   a. **[15]** Calcule $P(0<Y\le 1)$, $P(Y>0 \mid X=0)$ e $P(Y>1 \mid X\le 0)$

   b. **[10]** Calcule o coeficiente de correlação entre X e Y.

3. Seja (X,Y) uma variável aleatória bidimensional contínua com função de densidade conjunta dada por $f(x,y)=5x^3$, $0<x<1$, $x<y<2x$.

   a. **[15]** Obtenha as funções densidade marginais de X e de Y.

   b. **[15]** Calcule $P(X>0.5, Y>1)$ e obtenha $E(X)$ e $E(XY)$.

   c. **[10]** Obtenha $f_{Y|X}(y \mid x)$. Calcule também $P(Y>1 \mid X=0.7)$.

   d. **[10]** Seja $U=2Y-X$. Obtenha a função densidade conjunta do par (U,X).

4. **[15]** Seja $M_X(s)$ a função geradora de momentos da variável aleatória X com $M_X(s)=\frac{6}{8}+\frac{1}{8}(e^{-s}+e^{s})$.

   Obtenha a variância de X e obtenha também uma expressão geral para o momento central de ordem r de X.

5. O número de pequenas imperfeições em cada azulejo pintado à mão que são vendidos numa cadeia de lojas de "souvenirs" pode ser bem modelado por uma distribuição de Poisson de parâmetro 0.7. Assume-se naturalmente que este número é independente de azulejo para azulejo.
   a. **[10]** Qual a probabilidade de numa caixa com 6 azulejos existirem mais de 3 imperfeições no conjunto dos azulejos? Recalcule esta probabilidade sabendo que o 1º azulejo tem uma imperfeição.
   b. **[10]** Qual a probabilidade de, numa caixa com 10 azulejos, apenas dois deles apresentarem mais de 2 imperfeições cada?

6. Seja X uma variável aleatória com $F(x)=\begin{cases} 0 & x<-1 \\ 1/8 & -1\le x<0 \\ 7/8 & 0\le x<1 \\ 1 & x\ge 1 \end{cases}$.
   a. **[15]** Calcule $P(|X-\mu|\ge 2\sigma)$ sendo, como habitualmente μ e σ a média e o desvio-padrão de X.
   b. **[20]** Calcule um limite superior para esta probabilidade, $P(|X-\mu|\ge 2\sigma)$, recorrendo à desigualdade de Chebyshev e utilizando os valores de μ e σ obtidos na alínea anterior. Comparando o resultado nesta alínea com aquele que obteve na alínea anterior o que pode concluir em termos gerais quanto ao limite fornecido pela desigualdade.

7. A procura diária de cimento a granel (em toneladas) num entreposto pode ser bem modelada por uma variável aleatória com distribuição gama de parâmetros 2.5 e 3. Assuma que a procura num dia é independente da procura nos outros dias.
   a. **[10]** Qual a probabilidade da procura semanal (5 dias) ser superior a 6.275?
   b. **[15]** Sabendo que não há possibilidade de abastecimento durante a semana, qual deve ser a quantidade a ter em armazém para cobrir a procura com probabilidade 0.9?

8. **[15]** Seja Y uma variável aleatória com distribuição Binomial de parâmetros 3 e 0.5 e seja $\{X_n\}$, $n=1,2,\cdots$, uma sucessão de variáveis aleatórias tais que à variável X_n corresponde a função de distribuição

$$F_n(x)=\begin{cases} 0 & x<0 \\ \dfrac{n+0.5}{8n+3} & 0\le x<1 \\ \dfrac{4n+1.5}{8n+3} & 1\le x<2 \\ \dfrac{7n+1.5}{8n+3} & 2\le x<3 \\ 1 & x\ge 3 \end{cases}.$$

Mostre que $X_n \xrightarrow{D} Y$.